

## Estimación robusta de glucosa en un biorreactor continuo mediante un observador Super-Twisting en Bioreactores Continuos de Tanque Agitado

Gerardo Arno Sonk-Martínez<sup>a</sup> (<https://orcid.org/0000-0002-5214-1679>), Abraham Efraím Rodríguez-Mata<sup>a\*</sup> (<https://orcid.org/0000-0002-0262-420X>), Victor Alejandro Gonzalez-Huitrón<sup>b</sup> (<https://orcid.org/0000-0003-0426-0515>), R. M. Cabral-Lares<sup>a</sup> (<https://orcid.org/0009-0005-7425-7970>), Ricardo E. Lozoya Ponce<sup>a</sup> (<https://orcid.org/0000-0001-9927-2011>), Eduardo Jiménez López<sup>c</sup> (<https://orcid.org/0000-0002-1883-3890>)

<sup>a</sup>Tecnológico Nacional de México – Instituto Tecnológico de Chihuahua

<sup>b</sup>Tecnológico Nacional de México – Instituto Tecnológico de Queretaro

<sup>c</sup> Centro de Investigación y Estudios Avanzados de la Población, Universidad Autónoma del Estado de México, Paseo Tollocan S/N. Zona Universitaria, Toluca, México, [ejimenezl@uaemex.mx](mailto:ejimenezl@uaemex.mx), 0000-0002-1883-3890.

\*Autor correspondiente: [abraham.rm@chihuahua.tecnm.mx](mailto:abraham.rm@chihuahua.tecnm.mx)

Recibido: 15 de mayo de 2026, Aceptado 10 de junio de 2026

### Resumen

Esta investigación ofrece un modelo de estimación en línea de la concentración de glucosa en un biorreactor microbiano continuo (CSTR), utilizando un observador de modo deslizante de segundo orden de tipo Super-Twisting. La razón subyacente reside en que la glucosa, a pesar de ser esencial para la productividad y estabilidad del cultivo, tiende a ser desafiante de cuantificar en tiempo real debido a factores como el costo, la deriva y el retardo analítico. Fundamentado en un modelo de crecimiento no lineal estándar sobre sustrato, se configura un observador Super-Twisting que emplea la biomasa medida como salida y asegura una convergencia sólida del error bajo condiciones de incertidumbre cinética, perturbaciones confinadas y ruido de medición. Para cuantificar el valor añadido del enfoque sugerido, se utiliza un observador Luenberger extendido como referencia y se lleva a cabo una evaluación comparativa en simulación bajo diversos escenarios de ruido e incertidumbre paramétrica. Los hallazgos indican que el observador Super-Twisting consigue una reconstrucción de glucosa más veloz y sólida, con una sensibilidad reducida al ruido y un rendimiento transitorio superior al del Luenberger extendido, lo que subraya su relevancia para el monitoreo y control de bioprocesos en los que la instrumentación directa del sustrato es restringida.

**Palabras clave:** Estimación por Modo Deslizante Super-Twisting, Reactor Continuo de Tanque Agitado (CSTR),

### Abstract

This research offers an online estimation model of glucose concentration in a continuous microbial bioreactor (CSTR), using a second-order Super-Twisting sliding mode observer. The underlying reason lies in the fact that glucose, despite being essential for the productivity and stability of the culture, tends to be challenging to quantify in real-time due to factors such as cost, drift, and analytical delay. Based on a standard nonlinear growth model on substrate, a Super-Twisting observer is configured that uses the measured biomass as output and ensures solid error convergence under conditions of kinetic uncertainty, confined disturbances, and measurement noise. To quantify the added value of the suggested approach, an extended Luenberger observer is used as a reference, and a comparative evaluation is conducted in simulation under various noise and parametric uncertainty scenarios. The findings indicate that the Super-Twisting observer achieves a faster and more robust glucose reconstruction, with reduced sensitivity to noise and superior transient performance compared to the extended Luenberger, highlighting its relevance for the monitoring and control of bioprocesses where direct substrate instrumentation is restricted.

compared to the extended Luenberger, highlighting its relevance for the monitoring and control of bioprocesses where direct substrate instrumentation is restricted.

**Keywords:** Super-Twisting Observer Sliding Mode Control, Continuous Stirred Tank Reactor (CSTR),

## 1. Introducción

La monitorización y la evaluación en tiempo real de parámetros fundamentales en biorreactores no lineales constituyen un desafío crucial en el ámbito de la ingeniería de bioprocesos, dado su efecto directo en la productividad, la calidad y la seguridad operativa. La dinámica biológica presenta características no lineales que están relacionadas con cinemáticas dependientes del estado, procesos de inhibición, alteraciones metabólicas y restricciones en el transporte. Además, se deben considerar la incertidumbre en los parámetros, las variaciones cinéticas vinculadas a los regímenes fisiológicos y las perturbaciones externas que son difíciles de anticipar. En el ámbito de la fermentación y los cultivos microbianos, la cantidad de sustrato, especialmente la glucosa, juega un papel crucial en la regulación del crecimiento, la prevención de la formación de subproductos (como el metabolismo de desbordamiento), el mantenimiento de la fase exponencial y la optimización del rendimiento general. Sin embargo, la evaluación en tiempo real a menudo requiere el uso de sensores enzimáticos que son costosos, así como un mantenimiento y calibración constante. Además, estos sistemas pueden presentar problemas como retardo analítico, deriva y ensuciamiento. Por esta razón, es necesario contar con observadores robustos que puedan reconstruir la dinámica del sustrato utilizando mediciones parciales, tales como biomasa, oxígeno disuelto o señales indirectas, lo que permite llevar a cabo un control de cabo, optimización y diagnóstico fundamentados en predicciones.

Dentro de este contexto, los observadores de alta ganancia se han consolidado como una alternativa frecuente en biorreactores continuos, por lotes y por lotes alimentados [1]–[14]. Esto se debe a su diseño sencillo y a su fácil integración en modelos que permitan la observación directa. Un aspecto fundamental es la capacidad de reconstruir las tasas de reacción sin la necesidad de aplicar modelos cinéticos explícitos. Esto se vuelve especialmente útil en situaciones donde la cinética efectiva varía debido a diferentes fases, restricciones nutricionales o inhibición [4], [5], [7], [11]. La metodología de alta ganancia implementada en sistemas observables, independientemente de la entrada, ha demostrado ser efectiva en procesos de feed-batch y en reactores secuenciales por lotes. Esto incluye su uso en el tratamiento de aguas y en la producción de cultivos

industriales [4], [5], [7], [10]. Con el objetivo de mejorar la robustez ante la incertidumbre paramétrica y las alteraciones estructurales, se implementaron extensiones con acción integral, específicamente observadores NL-PI. Estos presentan estabilidad asintótica garantizada mediante el enfoque de Lyapunov, además de la capacidad de cancelar perturbaciones dinámicas que surgen de las variaciones en los parámetros [2], [3]. Posteriormente, los esquemas adaptativos de alta ganancia integraron la estimación simultánea de estados y perturbaciones constantes bajo excitación persistente [6], [8], [14]. Además, se han sugerido refuerzos a través de términos de modo deslizante para la estimación de entradas desconocidas [12], así como bancos de alta/baja ganancia para equilibrar la sensibilidad al ruido y la velocidad de respuesta [23]. Sin embargo, al aumentar la ganancia con el fin de acelerar la convergencia, estos observadores pueden intensificar el ruido y provocar oscilaciones en las estimaciones del sustrato o de la tasa específica. Además, es importante señalar que su convergencia tiende a ser exponencial (asintótica) y no se produce en un tiempo finito.

Como una opción sólida, los observadores de modo deslizante de segundo orden, especialmente el algoritmo super-twisting, han demostrado un rendimiento excepcional en biorreactores frente a la incertidumbre y el ruido [15]–[22]. A diferencia del enfoque deslizante de primer orden, el método de super-twisting facilita la convergencia en un tiempo finito utilizando estimaciones continuas, sin necesidad de derivadas explícitas de señales experimentales que suelen ser ruidosas [17], [20]. Se han documentado variantes que presentan ganancias no lineales, las cuales aseguran una convergencia uniforme y exhiben características de "tiempo fijo" o límites explícitos en la convergencia [15]. Asimismo, se han propuesto esquemas híbridos que incorporan un análisis de Lyapunov, aplicables a cinéticas desconocidas y perturbaciones desestructuradas [19], [21]. Las extensiones más recientes facilitan la estimación simultánea de parámetros inciertos, dinámicas internas no modeladas y perturbaciones de entrada impredecibles, logrando una mayor robustez [22]. Esto resulta fundamental ante variaciones bruscas en la alimentación o en las fluctuaciones de carga. Simultáneamente, a pesar de que los métodos basados en Kalman ofrecen filtrado estadístico, generalmente exigen un ajuste meticuloso de las covarianzas. Además, su rendimiento puede verse afectado negativamente si la incertidumbre no se adhiere

a las suposiciones gaussianas o si hay perturbaciones no consideradas que predominan [6], [14], [18]. En este marco, los observadores Luenberger extendidos han evidenciado un rendimiento inferior en comparación con el Filtro de Kalman Extendido (EKF) y las configuraciones de modo deslizante, especialmente en presencia de ruido, incertidumbre inicial y no linealidades significativas [18]. La evidencia proveniente de la industria respecto a la observación en intervalos de tiempo limitados respaldados la importancia práctica de la rápida convergencia ante perturbaciones significativas [25].

A pesar de los progresos logrados, aún se requiere un marco sistemático que abarque desde la definición del problema hasta la validación formal de estabilidad en un intervalo de tiempo finito. Este marco debe centrarse en la estimación robusta de la glucosa, considerada como una variable primaria no medible en un biorreactor no lineal. Además, es esencial incluir una comparación directa con un esquema de referencia robusto del tipo NL-PI [2], [3]. Esta cuestión es relevante, ya que las imprecisiones temporales en la medición de glucosa pueden provocar alteraciones metabólicas, disminución en el rendimiento o incremento de riesgos operativos. En este estudio, se presenta un observador super-twisting de segundo orden con el objetivo de estimar la concentración de glucosa en un biorreactor continuo no lineal, caracterizado por una cinética incierta. La concepción del diseño se fundamenta en una formulación del sistema que puede ser observada, donde se establece una superficie que toma en cuenta el error de salida y se eligen ganancias del super-twisting con el objetivo de garantizar la convergencia en un tiempo finito, incluso en presencia de perturbaciones limitadas y ruido en las mediciones. La estabilidad se evidencia a través de herramientas de Lyapunov no suaves, donde se establecen condiciones explícitas para las ganancias. Por último, se lleva a cabo una evaluación del rendimiento a través de una simulación comparativa con respecto a un observador NL-PI de alta ganancia [2], [3]. En este contexto, se analizan los resultados considerando evidencias representativas en observación adaptativa y filtradas en bioprocesos [6], [8], [14], [18], así como los avances recientes en super-twisting aplicados a bioprocesos [15]–[22].

El artículo está estructurado de la siguiente manera: en la Sección 2 se aborda la problemática y se introduce el modelo matemático del biorreactor, junto con los supuestos relacionados con la medición y la incertidumbre; la Sección 3 se centra en el desarrollo de la propuesta super-twisting y su análisis de estabilidad en un tiempo finito; en la Sección 4 se presentan simulaciones realizadas en contextos de ruido, incertidumbre y perturbaciones; la Sección 5 examina la convergencia, robustez y sensibilidad, haciendo comparaciones con

referencias relevantes [2]–[8], [12], [14], [18], [23]; Finalmente, la Sección 6 ofrece conclusiones y sugiere direcciones futuras, que incluyen la posibilidad de una validación experimental y un diagnóstico fundamentado en estimaciones.

## 2.0 Problemática y modelo matemático

En los biorreactores microbianos, la cantidad de glucosa  $S(t)$  actúa como una variable de control que influye en la tasa específica de crecimiento  $\mu(\cdot)$ , así como en el consumo de sustrato. Esto, a su vez, impacta la productividad y la estabilidad operativa del cultivo. No sin embargo, en contextos reales, la monitorización continua de la glucosa tiende a ser onerosa, sufre de retrasos analíticos y derivativos, o bien no se encuentra disponible de manera constante; Por este motivo,  $S(t)$  es a menudo considerado un estado que no puede ser medido. A diferencia de otras variables, la biomasa  $X(t)$  puede ser evaluada de forma más sencilla mediante métodos como la densidad óptica, la turbidez o la capacitancia, aunque estos datos pueden verse afectados por la presencia de ruido. La asimetría en los instrumentos impulsa la utilización de observadores no lineales con el fin de reconstruir  $S(t)$  a partir de datos parciales y entradas predefinidas (dilución/alimentación).

El desafío fundamental se encuentra en la incertidumbre o variabilidad de la cinética  $\mu(S)$ , que puede verse afectada por factores fisiológicos, inhibición y limitaciones. Además, parámetros como el rendimiento  $Y_{X/S}$  no son necesariamente invariables. En el ámbito literario, los métodos de alta ganancia han captado el interés debido a su capacidad para reconstruir variables y tasas sin la necesidad de aplicar modelos cinéticos complejos, lo que facilita una sintonización de manera bastante directa [4,7]. No obstante, su eficacia puede verse afectada por la presencia de ruido. Por otro lado, estructuras sólidas como NL-PI han demostrado ser tolerantes a las variaciones paramétricas que son comunes en los bioprocesos [2,3]. En entornos caracterizados por ruidos y perturbaciones, los observadores de segundo orden con gradual (super-twisting) son reconocidos por su capacidad de convergencia en un tiempo limitado y su robustez, a incluir también variantes ampliadas que se adaptan a perturbaciones de entrada imprevisibles [17,22]. La evaluación de la glucosa debe llevarse a cabo en un contexto de incertidumbre cinética, ruido en las mediciones y perturbaciones limitadas, este estudio plantea el problema dentro del marco de un modelo estándar de biorreactor no lineal y sienta las bases matemáticas para el desarrollo del observador super-twisting en secciones posteriores.

### 2.1 Modelado general del biorreactor

Se toma en cuenta un biorreactor de tipo agitado continuo (CSTR) en el que se desarrolla el crecimiento microbiano utilizando glucosa como sustrato.

Las variables de estado consideradas son la concentración de biomasa  $X(t)$  [g/L] y la concentración de glucosa  $S(t)$  [g/L]. Las variables de entrada que se pueden medir son la tasa de dilución  $D(t)$  [ $\text{h}^{-1}$ ] y la concentración de sustrato en la corriente de alimentación  $S_{in}(t)$  [g/L]. Bajo la hipótesis de mezcla ideal y volumen fijo, el modelo no lineal mínimo se expresa de la siguiente manera:

$$\dot{X}(t) = (\mu(S(t)) - D(t))X(t) + d_X(t), \quad (1)$$

$$\dot{S}(t) = D(t)(S_{in}(t) - S(t)) - \frac{1}{Y_{X/S}} \mu(S(t))X(t) + d_S(t),$$

donde  $Y_{X/S} > 0$  indica la relación entre la biomasa y el sustrato, y las perturbaciones agregadas  $d_X(t)$  y  $d_S(t)$  reflejan diversas incertidumbres (como la paramétrica, dinámica no modelada, y variaciones metabólicas, entre otras), las cuales se consideran limitadas:

$$|d_X(t)| \leq \bar{d}_X, \quad |d_S(t)| \leq \bar{d}_S. \quad (2)$$

La cinética  $\mu(S)$  se representa mediante una forma estándar, como la de Monod, con el propósito de facilitar la simulación y la comparación, siendo consciente de que en condiciones operativas reales puede haber desviaciones.

Se postula que la biomasa puede ser cuantificada (directa o indirectamente) mediante el ruido:

$$y(t) = X(t) + v(t). \quad (3)$$

donde  $v(t)$  representa un ruido de medición, comúnmente confinado o con una energía restringida.

Al establecer el vector de estado  $x(t) = [X(t) \ S(t)]^T$ , el sistema puede ser representado de la siguiente manera:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)) + d(t), \quad y(t) = h(x(t)) + v(t)$$

Con:

$$u(t) = D(t), \quad h(x) = X \text{ y } d(t) = [d_X(t) \ d_S(t)]^T$$

Por lo tanto, el problema de observación se formula de la siguiente manera: dada la variable  $y(t)$ ,  $D(t)$  y  $S_{in}(t)$ , se realiza una estimación lineal robusta de  $\hat{S}(t)$  (glucosa) frente a la incertidumbre cinética  $\mu(\cdot)$ , perturbaciones  $d(t)$  y ruido  $v(t)$ . En las secciones subsiguientes, se desarrolla un modelo observador de super-twisting de segundo orden para este modelo, aprovechando características de robustez y convergencia en tiempo finito documentadas para la reconstrucción de tasas y estados en bioprocesos [17], así como extensiones robustas frente a perturbaciones de entrada [22], y contrastándolo con estructuras de referencia robustas ampliamente empleadas en bioreactores (por ejemplo, NL-PI) [2] y [3].

### 3.0 Resultados principales

En la presente sección se expone el observador propuesto de manera deslizante en la sección correspondiente. Aplicación del algoritmo Super-Twisting (STA) para la estimación en segundo orden en un biorreactor continuo de tipo CSTR. El propósito es alcanzar la meta establecida: reconstruir la concentración del sustrato  $S(t)$  a partir de la medición de biomasa  $y(t) = X(t) + v(t)$ , en presencia de incertidumbre cinética, ruido de medición y perturbaciones acotadas.

Consideremos el modelo no lineal del biorreactor con los estados biomasa  $X(t)$  y glucosa  $S(t)$ :

$$\dot{X}(t) = (\mu(S(t)) - D(t))X(t) + d_X(t),$$

$$\dot{S}(t) = D(t)(S_{in}(t) - S(t)) - \frac{1}{Y_{X/S}} \mu(S(t))X(t) + d_S(t).$$

En este caso,  $D(t)$  y  $S_{in}(t)$  son entradas conocidas,  $\mu(\cdot)$  representa una función de crecimiento incierta, y  $d_X(t)$  y  $d_S(t)$  representan perturbaciones agregadas (incertidumbre paramétrica, dinámica no modelada, variaciones metabólicas, etc.), asumidas acotadas. La salida medida es  $y(t) = X(t) + v(t)$ , donde  $v(t)$  representa el ruido de medición.

El problema radica en la estimación robusta de  $\hat{S}(t)$  en línea, garantizando una reducción de error incluso cuando la cinética  $\mu(\cdot)$  no sea conocida con precisión y existan perturbaciones externas. La estrategia propuesta integra una inyección robusta tipo Super-Twisting sobre el canal de biomasa para establecer dinámicas de error caracterizadas por una convergencia acelerada y una elevada tolerancia a la incertidumbre.

Se propone el error relacionado a la estimación de biomasa:

$$e_X(t) = X(t) - \hat{X}(t).$$

Se propone el siguiente observador, compuesto por un modelo nominal y un término robusto  $u_{st}(t)$ :

$$\dot{\hat{x}} = f(x(t), u(t)) + \left[ u_{st}(e(t), z(t)) \frac{l_{2,hg}}{\varepsilon^2} e(t) \right]^T$$

Donde:

$$e(t) = \hat{x}_1 - y, \quad \dot{z} = -k_2 \sigma(e(t))$$

$$u_{st}(e(t), z(t)) = -k_1 \sqrt{|e(t)|} \sigma(e(t)) + v$$

Y  $\sigma(\cdot)$  es una aproximación de la función  $\text{sign}(\cdot)$ :

$$\sigma(e(t)) = \tanh\left(\frac{e(t)}{\phi}\right)$$

El término  $u_{st}(t)$  se produce a través de la implementación del algoritmo Super-Twisting y no necesita una derivación numérica de la salida medida. Un modelo estándar del STA es:

$$u_{st}(t) = -k_1 |e_X(t)|^{1/2} \operatorname{sgn}(e_X(t)) + z(t),$$

$$\dot{z}(t) = -k_2 \operatorname{sgn}(e_X(t)).$$

En este caso,  $k_1 > 0$  y  $k_2 > 0$  representan ganancias de diseño,  $\operatorname{sgn}(\cdot)$  es la función signo, y  $z(t)$  representa un estado interno del STA. En términos prácticos,  $\operatorname{sgn}(\cdot)$  puede ser reemplazada por una función de saturación para minimizar la conmutación y restringir la sensibilidad al ruido dentro de una capa delimitada, manteniendo la robustez.

La interpretación se establece como sigue: el término  $-k_1 |e_X(t)|^{1/2} \operatorname{sgn}(e_X(t))$  introduce un amortiguamiento no lineal que acelera la corrección, mientras que el estado  $z(t)$  se ajusta para mitigar perturbaciones agregadas en el canal de entrada. La consecuencia es una corrección continua que fuerza  $e_X(t)$  hacia un entorno alrededor de cero con celeridad y elevada inmunidad ante incertidumbre acotada.

La dinámica del error de biomasa puede articularse de manera simplificada como sigue:

$$\dot{e}_X(t) = \Phi(t) + \Delta_m(t) - u_{st}(t).$$

En este caso,  $\Phi(t)$  representa el desajuste nominal vinculado al uso de  $\mu(\hat{S}(t))$  en vez de  $\mu(S(t))$ , y  $\Delta_m(t)$  simboliza la perturbación agregada equivalente (abarcando  $d_X(t)$  y los efectos inducidos por la medición). Se asume que  $X(t)$  y  $S(t)$  mantienen valores positivos y que  $\mu(\cdot)$  es localmente Lipschitz. Bajo estas premisas,  $\Phi(t)$  es acotada siempre que el error  $e_S(t) = S(t) - \hat{S}(t)$  permanezca acotado. Por lo tanto, existe  $\Delta > 0$  tal que:

$$|\Phi(t) + \Delta_m(t)| \leq \Delta.$$

El STA es un algoritmo de modo deslizante de segundo orden que asegura convergencia en tiempo finito del par  $(e_X(t), z(t))$  hacia el conjunto de deslizamiento, siempre y cuando las perturbaciones sean acotadas y las ganancias se seleccionen por encima de un umbral dependiente de  $\Delta$ . Específicamente, condiciones suficientes adoptan la siguiente configuración:

$$k_2 > \Delta, \quad k_1 > c \sqrt{k_2 + \Delta}.$$

En este contexto,  $c > 0$  representa una constante asociada a la función de Lyapunov no suave. Bajo dichas circunstancias, el error  $e_X(t)$  alcanza un entorno pequeño cercano a cero en un tiempo finito, quedando su magnitud final dominada por el ruido de medición y por la capa límite empleada en la ejecución práctica.

Una vez que  $e_X(t)$  es reducido de manera acelerada, la ecuación correspondiente a  $\hat{S}(t)$  funciona como un subsistema no lineal excitado por entradas conocidas y por  $\hat{X}(t)$ . Desde la perspectiva de la interconexión, el esquema presenta una estructura en cascada: el lazo STA funciona como un corrector interno robusto y rápido, y el canal de sustrato hereda acotamiento y convergencia práctica bajo perturbaciones acotadas. Durante la ausencia de perturbaciones, la convergencia de  $e_S(t)$  se sustenta mediante argumentos estándar de observabilidad local en modelos de biorreactor; en presencia de ruido y perturbaciones, se obtiene convergencia práctica (acotamiento último) con mejoras transitorias evidentes frente a observadores de estructura lineal.

El observador sugerido integra (i) la inyección Super-Twisting para imponer una corrección en tiempo finito sobre la salida medida sin derivadas numéricas, y (ii) una dinámica interna de sustrato que, al estar alimentada por estimaciones robustas de biomasa, facilita la reconstrucción de  $\hat{S}(t)$  con alta resistencia a incertidumbre cinética. La sección subsecuente expone simulaciones comparativas que demuestran que el método Super-Twisting consigue un rendimiento transitorio superior y mayor robustez en comparación con un observador Luenberger extendido bajo circunstancias análogas.

### 3.- Simulación numérica del reactor no isotérmico

Con el propósito de evaluar el desempeño del observador Super-Twisting propuesto, se realizaron simulaciones numéricas del modelo no lineal del biorreactor continuo bajo cinética tipo Monod. Se adoptaron los siguientes parámetros cinéticos [26]:

$$\mu_{\max} = 0.179 \text{ h}^{-1}, \quad K_s = 11.37 \text{ g/L},$$

$$Y_{x/s} = 0.280 \text{ g/L}, \quad S_{\text{in}} = 0.420 \text{ g/L}$$

La cinética de crecimiento se modeló mediante la expresión clásica de Monod:

$$\mu(S) = \frac{\mu_{\max} S}{K_s + S}$$

Las condiciones iniciales físicas del sistema fueron:

$$X(0) = 0.1 \text{ g/L}, \quad S(0) = 0.75 \text{ g/L}$$

Para el diseño del observador, los estados fueron representados en coordenadas logarítmicas mediante la transformación  $x_1 = \ln(X)$  y  $x_2 = \ln(S_{\text{in}} - S)$ .

Las condiciones iniciales del observador se seleccionaron deliberadamente alejadas del estado real para evaluar la robustez frente a incertidumbre inicial:

$$\hat{X}(0) = 0.6X^*, \quad \hat{S}(0) = 0.2S_{in}$$

El punto de operación óptimo, obtenido mediante optimización numérica del régimen estacionario, fue:

$$D_{opt} = 0.00321865 \text{ h}^{-1}$$

$$X^* = 0.0593065 \text{ g/L}, \quad S^* = 0.208191 \text{ g/L}$$

lo cual corresponde a una condición de equilibrio estable bajo la cinética considerada.

Durante la simulación se incorporó ruido gaussiano aditivo en la medición de biomasa, con desviación estándar pequeña (orden  $10^{-2}$ ), así como perturbaciones acotadas en el canal dinámico para reproducir incertidumbre cinética y dinámica no modelada. El objetivo fue reproducir un escenario realista donde el modelo nominal no coincide exactamente con la planta.

El observador Super-Twisting fue comparado contra un observador Luenberger extendido con ganancias ajustadas para garantizar estabilidad local y velocidad de convergencia comparable.

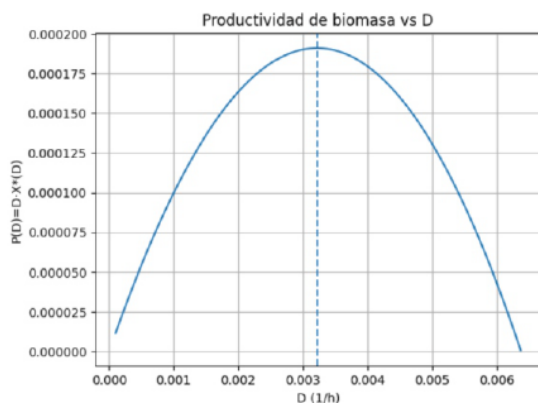


Figure 1: Visualización rápida de  $D$

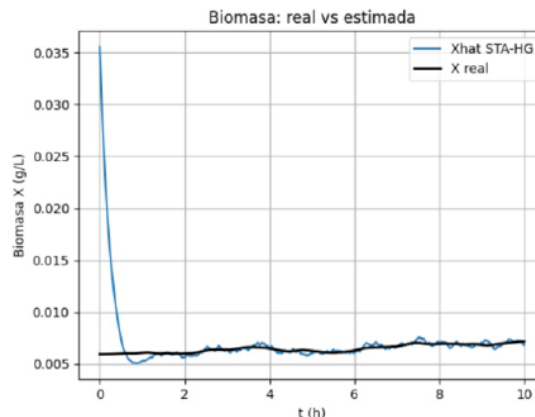


Figure 2: Reconstrucción robusta de biomasa mediante STA-HG bajo incertidumbre y ruido

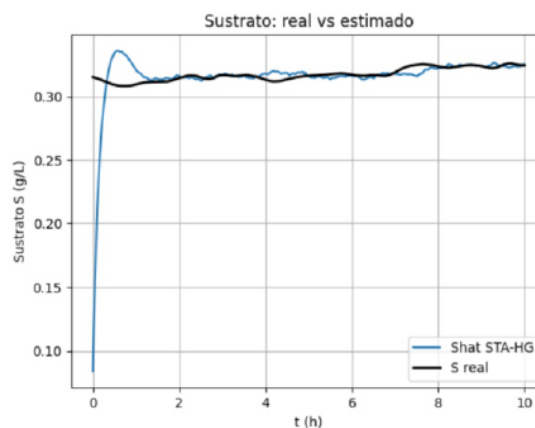


Figure 3: Reconstrucción del sustrato mediante observador híbrido STA-HG en un CSTR

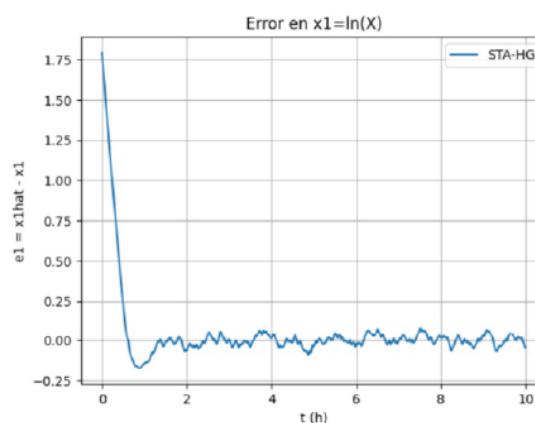


Figure 4: Dinámica del error de salida bajo inyección Super-Twisting con corrección High-Gain

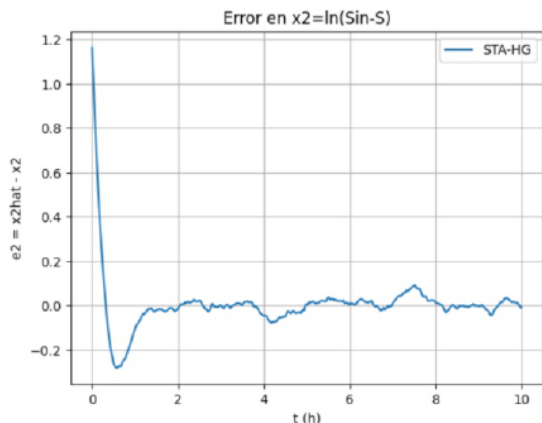


Figure 5: Convergencia práctica del error  $e_2(t)$  en arquitectura híbrida STA-HG

#### 4.-Análisis de resultados

La validación numérica del observador híbrido STA-HG permite analizar tanto la dinámica transitoria como el comportamiento en régimen permanente del sistema estimado.

En la Figura 1 se presenta la visualización del valor óptimo de la tasa de dilución  $D$ , obtenido a partir de la maximización de la productividad estacionaria  $P(D) = DX^*(D)$ . Este punto de operación garantiza una condición estable del reactor y sirve como referencia para evaluar la capacidad de reconstrucción del observador bajo un régimen realista de operación.

La Figura 2 muestra la comparación entre la biomasa real y su estimación mediante el observador STA-HG. Se observa un error inicial significativo debido a la discrepancia deliberada en las condiciones iniciales del estimador. No obstante, la acción del término Super-Twisting induce una corrección rápida del error, logrando una convergencia acelerada hacia una vecindad pequeña del valor real. En régimen permanente, la estimación permanece cercana a la biomasa real, con oscilaciones pequeñas atribuibles al ruido gaussiano de medición. Esta observación se respalda cuantitativamente mediante un error cuadrático medio (RMSE) en biomasa de:

$$RMSEX = 0.038998 \text{ g/L}$$

La reconstrucción del sustrato se presenta en la Figura 3, donde se compara la concentración real de glucosa con su estimación. A pesar de que el algoritmo Super-Twisting actúa únicamente en el canal de biomasa, el estado del sustrato converge de manera indirecta debido a la

estructura en cascada del sistema. La estabilización rápida del error de salida induce estabilidad práctica en el subsistema asociado al estado no medido. Se aprecia que, tras un transitorio inicial pronunciado, la estimación del sustrato se alinea con la trayectoria real, manteniendo una banda de error acotada y el error cuadrático medio es de:

$$RMSES = 0.004516 \text{ g/L}$$

Este valor es significativamente pequeño en comparación con la magnitud nominal del sustrato (del orden de  $10^{-1} \text{ g/L}$ ), lo que evidencia una reconstrucción altamente precisa.

La dinámica del error de salida bajo la arquitectura híbrida se ilustra en la Figura 4. En esta figura se observa la supresión rápida del error inicial mediante la acción no lineal del término STA, seguida de un régimen de oscilaciones pequeñas alrededor del origen. Este comportamiento es consistente con la convergencia práctica esperada cuando se emplea una aproximación suavizada de la función signo mediante una capa límite  $\phi$ .

Finalmente, la Figura 5 presenta la evolución temporal del error del segundo estado en coordenadas logarítmicas. Se aprecia un sobreimpulso inicial negativo, seguido de amortiguamiento y estabilización en una vecindad pequeña del origen. La magnitud residual del error está dominada por la presencia de ruido y por el espesor de la capa límite implementada en la función de conmutación. Este resultado confirma que la convergencia del estado no medido no requiere inyección directa de tipo STA en dicho canal, sino que se logra mediante la interconexión estructural del sistema y la corrección high-gain asociada al error de salida.

#### 5.- Conclusiones

En este trabajo se presentó un observador híbrido basado en el algoritmo Super-Twisting de segundo orden para la estimación en línea de la concentración de glucosa en un biorreactor continuo tipo CSTR, considerando incertidumbre cinética, perturbaciones acotadas y ruido de medición. El diseño se fundamentó en una formulación observable del sistema y en la aplicación de una inyección robusta en el canal de biomasa, complementada con una corrección tipo high-gain en el estado no medido.

El análisis teórico permitió establecer condiciones suficientes para garantizar convergencia práctica del error bajo perturbaciones acotadas, empleando argumentos basados en estabilidad no suave y estructura en cascada. La arquitectura propuesta evita el uso de derivadas numéricas de la salida medida, lo que reduce la sensibilidad a ruido de alta frecuencia y facilita su implementación en entornos reales.

Los resultados de simulación confirmaron que el observador STA-HG logra una supresión rápida del error inicial, incluso ante discrepancias significativas en las condiciones iniciales. Las métricas cuantitativas obtenidas evidencian una reconstrucción precisa tanto de la biomasa como del sustrato, con errores cuadráticos medios pequeños respecto a las magnitudes nominales del sistema. En particular, la convergencia del estado no medido se alcanza de manera indirecta a través de la interconexión estructural del modelo, validando la coherencia del diseño híbrido adoptado.

En comparación con esquemas lineales clásicos, la propuesta presenta un mejor comportamiento transitorio y mayor robustez frente a incertidumbre paramétrica y ruido gaussiano. Si bien la convergencia en presencia de capa límite es de tipo práctico, el error residual permanece dentro de márgenes aceptables para fines de monitoreo y control de bioprocesos.

### Financiamiento

Esta investigación fue financiada por el Tecnológico Nacional de México (TecNM), bajo la Convocatoria/Apoyo No. CI-01/2026 (Proyecto No. 24879), titulado: “Plataforma automatizada de control, inteligencia artificial y observadores de estado avanzados para la valorización de componentes bioasimilables mediante oxidación avanzada y fotobiorreactores”.

### Referencias

[1] Víctor Alejandro Reza López, J. T. Torres Muñoz, Jesús Guerrero (2023). Application of High Gain and Sliding Mode Observers for Estimating Key Variables in Bioprocesses. *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático*. <https://doi.org/10.58571/cnca.amca.2023.023>

[2] A. Rodríguez-Mata, J. Torres-Muñoz, A. R. Domínguez, et al. (2011). Nonlinear high-gain observers with integral action: Application to bioreactors. *International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control*. <https://doi.org/10.1109/ICEEE.2011.6106611>

[3] Abraham Efraim Rodríguez Mata, J. T. Muñoz, J. R. P. Correa, et al. (2016). Robust State Estimation in Presence of Parametric Uncertainty by NL-PI observers. An Application to Continuous Microbial Cultures. *IEEE Latin America Transactions*. <https://doi.org/10.1109/TLA.2016.7459599>

[4] D. Selișteanu, E. Petre, C. Marin, D. Șendrescu

(2009). High-gain observers for estimation of kinetics in a nonlinear bioprocess. *2009 ICCAS-SICE*.

[5] D. Selișteanu, E. Petre, D. Șendrescu, et al. (2009). High-gain observers for estimation of kinetics in biological sequencing batch reactors. *2009 IEEE International Conference on Automation and Logistics*. <https://doi.org/10.1109/ICAL.2009.5262720>

[6] Salwa Methnani, T. Damak, A. Toumi, et al. (2011). Adaptive-high-gain observers with an application to Wastewater Treatment plants. *International Conference on Communications, Computing and Control Applications*. <https://doi.org/10.1109/CCCA.2011.6031423>

[7] D. Selișteanu, E. Petre, M. Roman, D. Șendrescu (2012). Estimation of kinetic rates in a baker's yeast fed-batch bioprocess by using non-linear observers. *IET Control Theory & Applications*. <https://doi.org/10.1049/IET-CTA.2011.0067>

[8] S. Čelikovský, J. Torres-Muñoz, A. R. Domínguez-Bocanegra (2018). Adaptive high gain observer extension and its application to bioprocess monitoring. *Kybernetika (Praha)*. <https://doi.org/10.14736/kyb-2018-1-0155>

[9] D. Selișteanu, M. Roman, E. Petre, D. Șendrescu (2011). Nonlinear Control of a Wastewater Treatment Process inside a Biological Sequencing Batch Reactor. *Pacific-Asia Conference on Circuits, Communications and Systems*. <https://doi.org/10.1109/PACCS.2011.5990163>

[10] D. Selișteanu, E. Petre, M. Roman, et al. (2011). On-line estimation of unknown kinetics for the enzymatic synthesis of ampicillin. *2011 12th International Carpathian Control Conference (ICCC)*. <https://doi.org/10.1109/CARPATIANCC.2011.5945874>

[11] D. Selișteanu, E. Petre, M. Roman, et al. (2010). Online estimation of kinetic rates in a baker's yeast fed-batch bioprocess. *Proceedings of the 29th Chinese Control Conference*.

[12] K. Veluvolu, Y. Soh (2009). High-Gain Observers With Sliding Mode for State and Unknown Input Estimations. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. <https://doi.org/10.1109/TIE.2009.2023636>

[13] M. P. Joshi (1991). On-line Estimation and Adaptive Control of Bioreactors. Von G. Bastin und D. Dochain. Elsevier Science Publishers, Amsterdam - Oxford - New York - Tokyo 1990. XIV, 379 Seiten, 57 Abb., 5 Tab., geb., US-\$ 146,25.



<https://doi.org/10.1016/c2009-0-12088-3>

[14] Salowa Methnani (2012). Diagnostic, reconstruction et identification des défauts capteurs et actionneurs : application aux station d'épurations des eaux usées. (Thesis).

[15] N. Martínez-Fonseca, Isaac Chairez, Alexander S. Poznyak (2014). Uniform step-by-step observer for aerobic bioreactor based on super-twisting algorithm. *Bioprocess and Biosystems Engineering*. <https://doi.org/10.1007/s00449-014-1227-0>

[16] A. Vargas, A. Wouwer, J. Moreno (2013). Virtual output estimation in a bioreactor using a generalized super-twisting algorithm. <https://doi.org/10.3182/20131216-3-IN-2044.00051>

[17] H. Battista, J. Picó, F. Garelli, J. L. Navarro (2012). Reaction rate reconstruction from biomass concentration measurement in bioreactors using modified second-order sliding mode algorithms. *Bioprocess and Biosystems Engineering*. <https://doi.org/10.1007/s00449-012-0752-y>

[18] Fabian A. Ortega, Omar A. Perez, E. A. López (2015). Comparación del Desempeño de Estimadores de Estado no Lineales para Determinar la Concentración de Biomasa y Sustrato en un Bioproceso. <https://doi.org/10.4067/S0718-07642015000500006>

[19] Mateusz Czyżniewski, R. Łangowski (2024). Robust asymptotic super twisting sliding mode observer for non-linear uncertain biochemical systems. *Journal of Process Control*. <https://doi.org/10.1016/j.jprocont.2024.103192>

[20] H. Battista, J. Picó, F. Garelli, A. Vignoni (2010). Specific Growth Rate Estimation in Bioreactors Using Second-Order Sliding Observers. <https://doi.org/10.3182/20100707-3-BE-2012.0027>

[21] Mateusz Czyżniewski, R. Łangowski, R. Piotrowski (2023). Respiration rate estimation using non-linear observers in application to wastewater treatment plant. *Journal of Process Control*. <https://doi.org/10.1016/j.jprocont.2023.02.008>

[22] Reza López, V.A., G. J.N., Torres Muñoz, J.A. (2023). An Extended Super-Twisting Algorithm for simultaneous estimation of reaction rates and input disturbance in bioprocess. *Journal of Process Control*. <https://doi.org/10.1016/j.jprocont.2023.02.009>

[23] Marcelo Moisan, O. Bernard, J. Gouzé (2008). A high/low gain bundle of observers: application to the input

estimation of a bioreactor model.

<https://doi.org/10.3182/20080706-5-KR-1001.02629>

[24] M. Fall (2015). Synthèse d'observateurs pour les systèmes non linéaires : application à la commande et au diagnostic des bioréacteurs. (Thesis).

[25] R. Aguilar-López, R. Martínez-Guerra, J. Mendoza-Camargo, M. I. Neria-González (2006). Monitoring of an industrial wastewater plant employing finite-time convergence observer. *Journal of Chemical Technology & Biotechnology*. <https://doi.org/10.1002/JCTB.1458>

[26] Zentou, H., Zainal Abidin, Z., Yunus, R., Awang Biak, D. R., Zouanti, M., & Hassani, A. (2019). Modelling of molasses fermentation for bioethanol production: a comparative investigation of Monod and Andrews models accuracy assessment. *Biomolecules*, 9(8), 308.